שער

תוכן עניינים

הקדמה

משפט ההעתקה של רימן הוא אחד המשפטים המפורסמים והחשובים ביותר בתורת הפונקציות המרוכבות בפרט, ובמתמטיקה בכלל. המשפט טוען כי:

כל תחום פשוט-קשר שאינו $\mathbb{C}$ איזומורפי לעיגול היחידה הפתוח.

כלומר לכל תחום פשוט-קשר השונה מ-$\mathbb{C}$ יש פונקציה אנליטית חד-חד-ערכית המעתיקה אותו על עיגול היחידה הפתוח.

המשפט אינו מספק דרך למצוא איזומורפיזם כזה, אך עם זאת, חשיבותו התיאורטית גדולה, ומתבטאת בין היתר בכך שמסקנה פשוטה מן המשפט היא שכל שני תחומים פשוטי-קשר (שאינם המישור כולו) איזומורפיים זה לזה. יתרה מזאת, יש בידינו הכרה מלאה של כל האיזומורפיזמים של העיגול היחידה הפתוח על עצמו[1], וכך ניתן, מבלי שיש לנו צורה מפורשת של האיזומורפיזם, ללמוד על תכונות מעניינות שלו, כמו למשל איזו נקודה מועתקת לאפס, הנגזרת בנקודה וכן הלאה.

ידועות למשפט מספר הוכחות, אולם כולן מסובכות ודורשות ידע קודם רב, כצפוי ממשפט כה מרכזי וחזק. בעבודה זו נוכיח גרסא חלשה יותר של המשפט, העוסקת אך ורק בתחומים פשוטי קשר בעלי שפה שהיא עקומת ז'ורדן חלקה. על אף שזהו אינו המשפט המקורי, התנאים עדיין רחבים מספיק ובתמורה אנו מקבלים הוכחה פשוטה הרבה יותר, כאשר נדרש בנוסף ידע מוקדם באנליזה פונקציונלית.

העבודה מתבססת על המאמר [1].

[1] [2], כרך ו', פרק 12.8, שאלה 1

הוכחות ידועות למשפט

בפרק זה נציג את הקווים הכלליים של שתי הוכחות ידועות למשפט.

הוכחה מ-[2]

נתחיל בהוכחה המופיעה ב-[2], כרך ו', עמודים $134 - 137$.

ראשית נעבור מתחום פשוט-קשר נתון R לתחום איזומורפי R^*, המוכל בעיגול היחדה הפתוח. נעשה זאת על ידי כך שנמצא "תחום ביניים" R', איזומרפי ל-R, כך שהמשלים שלו מכיל נקודת פנים, כלומר יש $\alpha \in \mathbf{C}, r > 0$ כך שהעיגול הסגור $|z - \alpha| \leq r$ מוכל ב-$\mathbf{C} \setminus R'$. אז נשתמש בפונקציה האנליטית $z \mapsto \frac{r}{z-\alpha}$. באמצעות איזומורפיזם של עיגול היחידה ניתן לעבור לתחום S המכיל את הראשית.

נוכיח שלכל תחום פשוט-קשר S, המכיל את הראשית ומוכל בעיגול היחידה, קיימת פונקציה φ, ה"מקרבת" את S לעיגול היחידה; זו תהיה פונקציה φ, המשאירה את הראשית במקומה, מעתיקה את התחום S לתוך עיגול היחידה, ומקיימת לכל z $|\varphi(z)| > |z|$.

בהנתן S כזו, נתבונן בתחום $\varphi_0(S)$, כאשר φ_0 היא פונקציה כפי שתוארה לעיל; גם תחום זה הינו תחום פשוט-קשר המכיל את הראשית ומוכל בעיגול היחדה, ולכן גם לו יש פונקציה בעלת התכונות לעיל, נניח φ_1. גם התחום $\varphi_1(\varphi_0(S))$ הוא בעל כל התכונות הללו, ולכן יש φ_2, וכן הלאה. כך קיבלנו סדרת פונקציות $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, ממנה אפשר לבנות את סדרת הפונקציות $f_n = \varphi_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_0$.

זהו השלב הקשה בהוכחת המשפט: להראות כי כל $f_n(S)$ מכיל עיגול $|z| < r_n$, כאשר $\lim r_n = 1$, והסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה על קבוצות קומפקטיות המוכלות ב-S. אז נוכל להגדיר $f = \lim f_n$, ונקבל פונקציה אנליטית המעתיקה את S על עיגול היחידה. נצרף ל-f את הפונקציות שהעתיקו את R ל-S, ונקבל איזומורפיזם המעתיק את R על עיגול היחידה.

הוכחה מ-[3]

הוכחה נוספת מופיעה ב-[3]. בהוכחה זו נעשה שימוש במונח משפחות נורמליות; משפחה $\mathfrak{F}$ של פונקציות תקרא נורמלית בתחום Ω אם כל סדרה של פונקציות מ-$\mathfrak{F}$ מכילה תת-סדרה המתכנסת במידה שווה בכל קבוצה קומפקטית חלקית ל-Ω.

כמו כן, נאמר שמשפחה $\mathfrak{F}$ של פונקציות היא רציפה במידה אחידה ב-E אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$, התלוי ב-ε בלבד, כך שלכל $z_1, z_2 \in E$ המקיימים $|z_1 - z_2| < \delta$ מתקיים $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ **לכל** $f \in \mathfrak{F}$.

משפט ארצלה-אסקולי קובע שמשפחה $\mathfrak{F}$ של פונקציות רציפות שטווחן מרחב מטרי היא נורמלית בתחום $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ אם ורק אם מתמלאים שני התנאים הבאים:

1. $\mathfrak{F}$ רציפה במידה אחידה בכל קבוצה קומפקטית חלקית ל-Ω.
2. לכל $z \in \Omega$, הקבוצה $\{f(z) \ : \ f \in \mathfrak{F}\}$ חלקית לקבוצה קומפקטית.

על סמך משפט זה ניתן להוכיח כי משפחה של פונקציות אנליטית היא נורמלית ב-$\mathbf{C}$ אם ורק אם הפונקציות במשפחה חסומות במידה אחידה (כלומר, על ידי אותו קבוע לכל הפונקציות במשפחה) בכל קבוצה קומפקטית.

מטענה זו נובע, כי אם Ω תחום פשוט-קשר שאינו $\mathbf{C}$, וקבענו $z_0 \in \Omega$ כלשהו, אז המשפחה $\mathfrak{F}$ המורכבת מכל הפונקציות האנליטיות והחד-חד-ערכיות ב-Ω המעתיקות את Ω לתוך עיגול היחידה הסגור ומקיימות $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) > 0$, היא משפחה נורמלית.

נוכיח שהמשפחה אינה ריקה; נבחר $a \notin \Omega$, ואז מכיוון ש-Ω תחום פשוט-קשר יש לפונקציה $z \mapsto z - a$ שורש אנליטי; נסמנו $h(z)$. אז ניתן להראות שיש $\rho > 0$ כך ש-$\rho \geq |h(z) + h(z_0)|$ לכל $z \in \Omega$, והפונקציה הבאה נמצאת ב-$\mathfrak{F}$:

$$g_0(z) = \frac{\rho}{4} \frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2} \cdot \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \cdot \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}$$

אם נסמן $B = \sup \{g'(z_0) \ : \ g \in \mathfrak{F}\} \in (0, \infty]$, אז יש סדרת פונקציות $g_n \in \mathfrak{F}$ כך ש-$g_n'(z_0) \to B$; היות ו-$\mathfrak{F}$ נורמלית, לסדרה זו יש תת-סדרה המתכנסת לפונקציה אנליטית f במידה שווה בכל קבוצה קומפקטית. בהסתמך על כך ש-g_n חד-חד-ערכית, ניתן להוכיח כי גם f חד-חד-ערכית.

נותר אפוא להראות כי f מקבלת כל ערך בעיגול היחידה. נניח אפוא ש-f אינה מקבלת את הערך w_0. אז יש ב-Ω שורש אנליטי להעתקה $\frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)}$; נסמנו $F(z)$. מכיוון ש-$w \mapsto \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$ היא העתקת מוביוס המעתיקה את עיגול היחידה על עצמו, נקבל ש-F חד-חד-ערכית וטווחה מוכל בעיגול היחידה. מכאן נסיק כי הפונקציה:

$$G(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \cdot \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)}$$

נמצאת ב-$\mathfrak{F}$. חישוב ישיר מראה כי:

$$G'(z_0) = \frac{|F'(z_0)|}{z - |F(z_0)|^2} = \frac{1 + |w_0|}{2\sqrt{|w_0|}} B > B$$

וזו סתירה לכך ש-B הוא החסם העליון של כל ה-$g'(z_0)$, $g \in \mathfrak{F}$.

לפיכך הנחתנו שגויה; f מקבלת כל ערך בעיגול היחידה, ולכן היא האיזומורפיזם הנדרש.

רעיון ההוכחה באמצעות כלים של אנליזה פונקציונלית

בפרק זה נציג את רעיון ההוכחה של גרסא חלשה יותר של משפט רימן:

כל תחום פשוט-קשר ששפתו עקומת ז'ורדן חלקה איזומורפי לעיגול היחידה הפתוח.

מהניסוח כבר נובע שהתחום אינו המישור המרוכב כולו, כי ל-$\mathbf{C}$ אין שפה (לא ריקה).

ראשית נזכיר את המושגים המוזכרים בניסוח המשפט:

תחום פשוט-קשר: תחום אשר מכיל את הפנים של כל קונטור סגור פשוט המוכל בו.

עקומת ז'ורדן חלקה: תמונה של מסילה סגורה חלקה; מסילה סגורה חלקה הינה פונקציה גזירה $f:[0,1]\to\mathbf{C}$, כך ש-f' רציפה ואינה מתאפסת ב-$[0,1]$, ובנוסף מתקיים $f(0)=f(1)$ וגם $f'(0)=f'(1)$.

איזומורפיזם: פונקציה אנליטית חד-חד-ערכית ועל.

נוכיח את הטענה רק עבור תחום D המכיל את הראשית. אם $0\notin D$, ניקח $w\in D$, ונתבונן בפונקציה $z\mapsto z-w$; תמונת D על ידי ההעתקה ההפיכה והאנליטית הזו היא תחום פשוט-קשר המכיל את הראשית. נמשיך את ההוכחה עבור תמונת D ונקבל שתמונה זו איזומורפית לעיגול היחידה, וכך נוכל להרכיב פונקציות ולקבל העתקה איזומורפית וחח"ע מ-D על עיגול היחידה.

האיזומורפיזם המבוקש f מעתיק את ∂D על מעגל היחידה. מכאן ש-$\ln|f|$ מעתיקה את ∂D לאפס; או במילים אחרות $\mathrm{Re}\,(\log f)$ מתאפסת על ∂D. מכאן עולה הרעיון לחפש פונקציה H הרמונית ב-$D\setminus\{0\}$ אשר מתאפסת על ∂D. אם נמצא פונקציה כזו, הרי שנוכל למצוא גם פונקציה אנליטית $H+iV$ ב-$D\setminus\{0\}$; ואז נוכל להראות שהפונקציה $h=e^{H+iV}$ היא האיזומורפיזם המבוקש, אם נוכל להשלימה בראשית על ידי אפס פשוט. מכאן שאפשר לתרגם את הבעיה לבעיית מציאת פונקציית גרין לאופרטור לפלס.

נראה שאפשר להשתמש ב-H מהצורה:

$$H(w)=\ln|w|-L[\ln|z-w|]$$

כאשר הפונקציונל הלינארי L מוגדר על מרחב הפונקציות הרציפות בשפת התחום:

$$L[g]=\lim_{n\to\infty}\frac{\langle gf_n,f_n\rangle}{d}$$

והסדרה f_n מורכבת מפונקציות אנליטיות ב-D ורציפות על שפת D, כך ש-$f_n(0)=1$ ו-$||f_n||^2\to d$ כאשר d הוא האינפימום של כל הנורמות-בריבוע של פונקציות אנליטיות מנורמלות (ערכן ב-0 הוא 1).

המכפלה הפנימית שתשמש אותנו תהיה המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{\partial D} f\,\overline{g}\,|dz|$$

פרטי ההוכחה באמצעות כלים של אנליזה פונקציונלית

יהי D תחום פשוט-קשר במישור המרוכב ששפתו עקומת ז'ורדן חלקה. כאמור נצמצם את הדיון למקרה בו $0 \in D$.

נוכיח שהפונקציה שהוגדרה בפרק הקודם $\langle \cdot, \cdot \rangle$ היא אכן מכפלה פנימית. כזכור, אם γ מסילה סגורה-פשוטה שתמונתה ∂D, אז:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \overline{g(\gamma(t))} \, |\gamma'(t)| \, dt$$

נבחן את תכונות המכפלה הפנימית:

חיוביות:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(\gamma(t))|^2 \, |\gamma'(t)| \, dt$$

האינטגרנד אי-שלילי ולכן $\langle f, f \rangle \geq 0$. האינטגרנד הוא פונקציה רציפה, ולכן אם האינטגרל חיובי בנקודה אחת אז הוא חיובי בקטע ומכאן שהאינטגרל כולו יצא חיובי ממש. לכן האינטגרל הוא אפס אם ורק אם $f \equiv 0$.

לינאריות:

הלינאריות (ברכיב הראשון) נובעת ישירות מהלינאריות של אופרטור האינטגרל.

הרמטיות:

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \overline{g(\gamma(t))} \, |\gamma'(t)| \, dt} = \int_a^b \overline{f(\gamma(t)) \cdot \overline{g(\gamma(t))} \, |\gamma'(t)|} \, dt \underset{|\gamma'(t)| \in \mathbf{R}}{\underset{\downarrow}{=}}$$

$$= \int_a^b \overline{f(\gamma(t))} \cdot g(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \, dt = \langle g, f \rangle$$

לכן $\langle \cdot, \cdot \rangle$ היא אכן מכפלה פנימית.

נסמן ב-A את קבוצת הפונקציות האנליטיות ב-D ורציפות על ∂D. נתבונן ב-$f \in A$ כלשהי המקיימת $1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z} \, dz = f(0)$. מאי שיוויון קושי-שוורץ נקבל:

$$\left\langle |f| , \left| \frac{1}{z} \right| \right\rangle^2 = \left(\int_{\partial D} \left| \frac{f(z)}{z} \right| |\, dz| \right)^2 \leq || \, |f(z)| \, ||^2 \cdot || \, \left| z^{-1} \right| \, ||^2 = \int_{\partial D} |f|^2 | \, dz| \cdot \int_{\partial D} \left| \frac{dz}{z^2} \right| \underset{\text{משפט ההערכה}}{\underset{\downarrow}{\leq}}$$

$$\leq \left(\max_{\partial D} \frac{1}{|z|^2} \right) L \, ||f||^2$$

כאשר L הוא אורך ∂D. נסמן את המקסימום המופיע לעיל ב-M. לפי אחת הגרסאות של משפט ההערכה[2] נקבל:

$$||f||^2 \geq \frac{1}{ML}\left(\int\limits_{\partial D}\left|\frac{f(z)}{z}\right| |dz|\right)^2 \geq \frac{1}{ML}\left|\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z}\,dz\right|^2 = \frac{4\pi^2}{ML} > 0$$

לפיכך הקבוצה $\{||f||^2 \,:\, f \in A,\, f(0)=1\}$ חסומה מלרע על ידי קבוע חיובי, ולכן יש לה אינפימום $d>0$, וישנה סדרה (f_n) של פונקציות ב-A המקיימות $f_n(0)=1$, $||f_n||^2 \to d$. מכלל המקבילית (המתקיים כי זהו מרחב מכפלה פנימית) נקבל:

$$0 \leq ||f_n - f_m||^2 = 2\,||f_n||^2 + 2\,||f_m||^2 - 4\left|\left|\frac{f_n+f_m}{2}\right|\right|^2 \leq 2\,||f_n||^2 + 2\,||f_m||^2 - 4d \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

אי־השיוויון האחרון מסתמך על כך שערכה של הפונקציה $\frac{f_n+f_m}{2}$ ב-0 הוא 1, ולכן הריבוע של הנורמה של הפונקציה הזו אינו קטן מ-d. קיבלנו אפוא שהסדרה (f_n) היא סדרת קושי.

אם g רציפה על ∂D, נקבל לכל פונקציה h רציפה על ∂D:

$$||gh||^2 = \int\limits_{\partial D} gh\overline{gh}\,|dz| = \int\limits_{\partial D} |g|^2\,|h|^2\,|dz| \leq \int\limits_{\partial D} |h|^2 \cdot \max_{\partial D}|g|^2\,|dz| = \max_{\partial D}|g|^2 \int\limits_{\partial D} |h|^2\,|dz| \qquad (1)$$

נקבל:

$$||gh|| \leq \max_{\partial D}|g| \cdot ||h|| \qquad (*)$$

נשתמש באי שיוויון קושי-שוורץ ונקבל:

$$\begin{aligned}
|\langle gf_n, f_n\rangle - \langle gf_m, f_m\rangle| &= |\langle gf_n - gf_m + gf_m, f_n\rangle - \langle gf_m, f_m - f_n + f_n\rangle| \\
&= |\langle gf_n - gf_m, f_n\rangle + \langle gf_m, f_n\rangle - \langle gf_m, f_m - f_n\rangle - \langle gf_m, f_n\rangle| \\
&\leq |\langle gf_n - gf_m, f_n\rangle| + |\langle gf_m, f_m - f_n\rangle| \\
&\leq ||gf_n - gf_m|| \cdot ||f_n|| + ||gf_m|| \cdot ||f_m - f_n|| \\
&\leq \max_{\partial D}|g| \cdot (||f_n|| + ||f_m||) \cdot \underbrace{||f_m - f_n||}_{\to 0}
\end{aligned}$$

הסדרה $||f_n||$ חסומה מפני שהיא סדרה מתכנסת, ולכן הסדרה $\langle gf_n, f_n\rangle$ היא סדרת קושי של מספרים מרוכבים ולכן מתכנסת.

לפיכך נוכל להגדיר את הפונקציונל הבא על מרחב הפונקציות הרציפות על ∂D (עם הנורמה שהוגדרה לעיל):

$$L[g] = \lim_{n\to\infty}\frac{\langle gf_n, f_n\rangle}{d} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\int\limits_{\partial D} g\,|f_n|^2\,|dz|$$

לינאריות הפונקציונל נובעת מלינאריות המכפלה הפנימית; הפונקציונל חסום מכיוון שלכל n מתקיים:

$$\left|\frac{\langle gf_n, f_n\rangle}{d}\right| = \left|\frac{1}{d}\left\langle g, |f_n|^2\right\rangle\right| \leq \frac{\left|\left||f_n|^2\right|\right|}{d}\,||g||$$

[2] [2], כרך ב', עמוד 171, שיוויון $(*)$.

והסדרה $\frac{||\,|f_n|^2\,||}{d}$ חסומה.

ניקח $g \in A$ המקיימת $g(0) = 0$, ו-ε מספר מרוכב כלשהו. אז $f_n + \varepsilon g f_n$ היא פונקציה ב-A המקבלת את הערך 1 ב-0, ולכן $d \leq ||f_n + \varepsilon g f_n||^2$. מכאן נקבל:

$$\begin{aligned} d &\leq \langle f_n + \varepsilon g f_n, f_n + \varepsilon g \rangle = \langle f_n, f_n + \varepsilon g f_n \rangle + \varepsilon \langle g f_n, f_n + \varepsilon g f_n \rangle \\ &= \langle f_n, f_n \rangle + \overline{\varepsilon} \langle f_n, g f_n \rangle + \varepsilon \langle g f_n, f_n \rangle + \varepsilon \langle g f_n, \varepsilon g f_n \rangle \\ &= ||f_n||^2 + 2\Re\{\varepsilon \langle g f_n, f_n \rangle\} + |\varepsilon|^2 \, ||g f_n||^2 \end{aligned}$$

$|g|$ חסומה על ∂D וכאמור הסדרה $\{||f_n||\}$ חסומה. לפיכך, על פי אי-שיוויון (*), קיים קבוע K כך שלכל n, $||g f_n||^2 \leq K$. נשאיף את n לאינסוף ונקבל:

$$d \leq d + 2\Re\{\varepsilon d L[g]\} + K |\varepsilon|^2$$

זה מתקיים לכל $\varepsilon \in \mathbf{C}$. אם $L[g] \neq 0$, נוכל לבחור $\varepsilon = -\frac{m}{L[g]}$ כאשר m מספר ממשי חיובי כלשהו, נקבל:

$$K \frac{m^2}{|L[g]|^2} - 2md \geq 0$$

נסדר ונקבל:

$$|L[g]|^2 \leq \frac{1}{2d} m K$$

אך m יכול להיות קטן כרצוננו, ולכן הנחתנו שגויה ואכן $L[g] = 0$, וזה כזכור מתקיים לכל $g \in A$ עם $g(0) = 0$.

כמו כן, מתקיים:

$$L[1] = \lim_{n \to \infty} \frac{\langle f_n, f_n \rangle}{d} = \lim_{n \to \infty} \frac{||f_n||^2}{d} = 1$$

ולכן אם $g \in A$ כלשהי אז $g(z) - g(0)$ ב-A ומקבלת 0 ב-0, ומתקיים:

$$L[g(z)] = L[g(z) - g(0) + g(0)] = L[g(z) - g(0)] + g(0) L[1] = g(0)$$

נגדיר לכל $0 \neq w \in D$, כאשר $z \in \partial D$:

$$H(w) = \ln|w| - L[\ln|z - w|]$$

בדרך הדומה לדרך בה ננקוט בהמשך כאשר נרצה ללמוד על השפעת L על פונקציות במעבר לגבול, ניתן להראות כי L מתחלפת עם אופרטור הלפלסיאן Δ.

הפונקציה $w \mapsto \ln|z - w|$ ($w \in D$), כאשר בוחנים אותה כפונקציה של שני משתנים u, v עם $w = u + iv$, היא הרמונית לכל $z \in \partial D$ כי היא החלק הממשי של הלוגריתם האנליטי $z \mapsto \log(z - w)$ ($z \neq w$ כי אחד ב-D והשני ב-∂D). כמו כן, גם הפונקציה $\ln|w|$ היא הרמונית בהיותה החלק הממשי של הלוגריתם האנליטי $w \mapsto \log w$. לכן:

$$\Delta H = \Delta \ln|w| - L[\Delta \ln|z - w|] = 0 - L[0] = 0$$

לכן H הרמונית ב-$D \setminus \{0\}$, ולכן יש V כך ש-$H + iV$ אנליטית ב-$D \setminus \{0\}$; לפיכך הפונקציה:

$$h(w) = \exp(H + iV)$$

היא פונקציה אנליטית ב-D ללא הראשית המקיימת $H = \ln e^H = \left|e^{H+iV}\right| \ln = \ln|h|$.

תהי $g(z,w)$ פונקציה רציפה התלויה בשני משתנים מרוכבים. אם מתקיים:

$$\lim_{w\to w_0} g(z,w) = g(z,w_0)$$

במידה שווה לכל $z \in \partial D$, אז מתקיים (כאשר כזכור L הוא אורך ∂D):

$$||g(z,w)-g(z,w_0)||^2 = \int_{\partial D} |g(z,w)-g(z,w_0)|^2 \, |dz| \le L \cdot \max_{z\in\partial D} |g(z,w)-g(z,w_0)|^2 \xrightarrow{w\to w_0} 0$$

לכן, מכיוון ש-L אופרטור חסום, נקבל:

$$|L[g(z,w)] - L[g(z,w_0)]| = |L[g(z,w)-g(z,w_0)]| \le ||L|| \cdot ||g(z,w)-g(z,w_0)|| \xrightarrow{w\to w_0} 0$$

ולכן:

$$\lim_{w\to w_0} L[g(z,w)] = L[g(z,w_0)]$$

התנאי מתקיים עבור $g(z,w) = \ln|z-w|$, כאשר $z \in \partial D$ ו-$w_0 = 0$, כפי שנובע מאי השיוויון $\ln(1+x) \le x$:

$$|\ln|z-w| - \ln|z|| = \left|\ln\left|\frac{z-w}{w}\right|\right| = \left|\ln\left|1-\frac{w}{z}\right|\right| \le \ln\left(1+\left|\frac{w}{z}\right|\right) \le \max_{z\in\partial D} \frac{1}{|z|} \cdot |w| \xrightarrow{w\to 0} 0$$

לפיכך נקבל $L[\ln|z|] \xrightarrow{w\to 0} L[\ln|z-w|]$. לכן:

$$\lim_{w\to 0}\left|\frac{h(w)}{w}\right| = \lim_{w\to 0}\frac{e^H}{|w|} = \lim_{w\to 0}\frac{1}{\exp\left(L[\ln|z-w|]\right)} = \frac{1}{\exp\left(L[\ln|z|]\right)}$$

קיבלנו שלביטוי $\frac{h(w)}{w}$ יש גבול ב-0, והגבול הזה אינו אפס, ולכן אם נגדיר $h(0) = 0$ נקבל פונקציה אנליטית ב-D עם אפס פשוט בראשית.

נראה שניתן להשלים את h באופן רציף כך ש-$|h(\partial D)| = 1$; מכיוון ש-D פשוט-קשר, מטענה זו ינבע ש-h על עיגול היחידה. יהי אפוא $w_0 \in \partial D$, ויהיו $w \in D, w^* \notin D$, הנמצאים על הנורמל ל-∂D בנקודה w_0 ומרוחקים ממנה במידה שווה. באמצעות עקרון שימור המעגלים של העתקות מוביוס ניתן לראות ששפת התחום $\left|\frac{z-w}{z-w^*}\right| < t$, כאשר $t \neq 1$, הוא מעגל שמרכזו על הישר המחבר את w ו-w^* ורדיוסו $f(t)\,|w-w^*|$ כאשר f פונקציה התלויה ב-t בלבד. כמו כן, אם $0 < t < 1$ אז התחום הוא חוץ המעגל, ואם $t > 1$ אז הביטוי הוא פנים המעגל, וזאת כי הביטוי $\left|\frac{z-w}{z-w^*}\right|$ שואף ל-1 כאשר $z \to \infty$.

לפיכך, אם $\delta > 0$ אזי התחום $\frac{1}{1+\delta} < \left|\frac{z-w}{z-w^*}\right| < 1+\delta$ הוא המישור כולו, פרט לשני עיגולים. קל לראות מהצבה ישירה כי w_0 נמצא מחוץ לשני המעגלים. לפנינו אפוא שני מעגלים, שמרכזיהם מונחים על הישר העובר דרך w ו-w^*, רדיוסיהם פרופורציונליים ל-$|w-w^*|$, ואף אחד מהם לא מכיל את w_0. מכיוון שהשפה הינה עקומת ז'ורדן חלקה, כאשר $|w-w^*|$ קטן מספיק, עיגול אחד מוכל בפנים D והעיגול השני מוכל בחוץ של D. לפיכך, עבור $|w-w^*|$ קטן מספיק, אי השיוויון $\frac{1}{1+\delta} < \left|\frac{z-w}{z-w^*}\right| < 1+\delta$ מתקיים לכל $z \in \partial D$; ומכאן שמתקיים $\lim_{|w-w^*|\to 0} \ln\left|\frac{z-w}{z-w^*}\right| = 0$ במידה שוה לכל $z \in \partial D$. מרציפות ומלינאריות L מתקיים:

$$\lim_{|w-w^*|\to 0} H(w) - \underbrace{H(w^*)}_{0 \text{ כי } w^*\notin \overline{D}} = \lim_{|w-w^*|\to 0} \ln|w| - \ln|w^*| - \left(L[\ln|z-w|] - L[\ln|z-w^*|]\right)$$

$$= \lim_{|w-w^*|\to 0} \ln\frac{|w|}{|w^*|} - \lim_{|w-w^*|\to 0} L\left[\ln\left|\frac{z-w}{z-w^*}\right|\right] = 0$$

לכן $H(w_0)=0$, ולכן $|h(w_0)|=1$. יצאנו מ-w_0 כללי והוכחנו שהוא מועתק לשפת עיגול היחידה; לפיכך שפת ∂D מועתקת לשפת עיגול היחידה, ומכיוון ש-D תחום פשוט-קשר, הרי ש-h מקבלת כל ערך בעיגול היחידה.

נוכיח כעת ש-h חד-חד-ערכית ב-D.[3] לשם כך נתבונן בקבוצה D_1, המכילה כל $z\in D$ המקיים $h'(z)\neq 0$, ולכל $z\neq z'\in D$ מתקיים $h(z)\neq h(z')$. אם נראה ש-$D_1=D$, הרי שהוכחנו ש-h חד-חד-ערכית ב-D.

D_1 אינה ריקה כי $0\in D_1$ (הראינו ש-h מתאפסת אך ורק ב-0, והאפס הוא פשוט ולכן $h'(0)\neq 0$). נניח בשלילה כי $D_1\subset D$; אז, מכיוון ש-D פשוט-קשר, יש $z_0\in D\cap\partial D_1$. אז יש סדרה $z_n\to z$ כך שלכל n, $z_n\in D\setminus D_1$. השיוויון $h'(z_n)=0$ מתקיים עבור מספר סופי של n-ים (אחרת, לפי משפט היחידות, $h'\equiv 0$); לכן אפשר להניח שלכל n קיים $z_n'\neq z_n$ המקיים $h(z_n)=h(z_n')$.[4] $\{z_n'\}$ הינה סדרה חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת; שוב נקצר בכתיבה ונניח כי $z_n'\to z_0'$, כאשר $z_0'\in D\cup\partial D$. h רציפה ולכן $h(z_n')\to h(z_0')$; אך $h(z_n')=h(z_n)$ ולכן $h(z_0')=h(z_0)$. $z_0\in D$ ולכן $|h(z_0')|<1$, ולכן בהכרח $z_0'\in D$.

ממשפט ההעתקה הפתוחה נובע כי סביבה של z_0 עוברת לסביבה N של $h(z_0)$, וסביבה של z_0' עוברת לסביבה של $h(z_0')$. מכיוון ש-$h(z_0)=h(z_0')$, הרי שיש סביבה משותפת קטנה B של $h(z_0)$, כך ש-h מקבלת את כל ערכי B גם בסביבה V של z_0 וגם בסביבה V' של z_0'. מכאן שבהכרח $z_0=z_0'$, וזאת מפני שאם לא, ניקח סביבה N קטנה מספיק של z_0, כך ש-$h(N)\subseteq B$. סביבה זו מכילה $w\in D_1$ (כי, כזכור, $z_0\in\partial D$). אך $h(w)\in B$, ולכן יש $w'\in V'$ כך ש-$h(w)=h(w')$. על ידי בחירה קטנה מספיק של הסביבות V,V' אפשר להראות כי $w\neq w'$, על אף שתמונת הנקודות תחת h שווה; זאת בסתירה לכך ש-$w\in D_1$.

הראינו אפוא ש-$z_0=z_0'$; לכן אין סביבה של z_0 בה h חד-חד-ערכית, ולכן[5] $h'(z_0)=0$. מכאן שבסביבה של z_0 מתקיים $h(z)-h(z_0)=\varphi^n(z)$, כאשר φ פונקציה אנליטית חד-חד-ערכית ו-$n\geq 2$. מכיוון ש-$\varphi(z_0)=0$, אפשר להראות (בדרך דומה בה נקטנו לעיל, תוך שימוש במשפט ההעתקה הפתוחה) שיש $r>0$ ויש סביבה U של z_0 כך שאם $|w|<r$ אז $\varphi(z)=w$ עבור איזשהו $z\in U$. ניקח סביבה קטנה מספיק של z_0, כך שתמונתה תחת $h(z)-h(z_0)$ מוכלת בעיגול ברדיוס r סביב הראשית; סביבה זו מכילה $z'\in D_1$. $|\varphi(z')|<r$ ולכן $\left|e^{\frac{2\pi i}{n}}\varphi(z')\right|<r$; לפיכך יש $z''\in U$ כך ש-$\varphi(z'')=e^{\frac{2\pi i}{n}}\varphi(z')$. נעלה את שני האגפים בחזקת n, נסדר ונקבל $h(z')=h(z'')$, על אף שברור ש-$z'\neq z''$ (כי תמונתן של הנקודות תחת φ שונה). קיבלנו סתירה לכך ש-$z'\in D_1$.

מכאן שהנחתנו הראשונית, ש-$D_1\subset D$, הינה שגויה, ואכן $D_1=D$ והפונקציה h חד-חד-ערכית.

---

[3] ההוכחה מתבססת על [4], עמוד 15.

[4] באופן פורמלי, מכיוון שאי-השיוויון $h'(z_n)\neq 0$ מתקיים כמעט לכל n, הרי שיש ל-z_n תת-סדרה z_{n_k} עבורה קיימת z_{n_k}'; אך לשם נוחות הכתיבה נניח שמדובר בסדרה עצמה.

[5] [2], כרך ו', משפט 12.7

רשימת מקורות

[1] Garabedian, P. R. "A simple proof of a simple version of the Riemann mapping theorem by simple functional analysis." The American Mathematical Monthly 98.9 (1991): 824-826.

[2] ספר הקורס "פונקציות מרוכבות"

[3] Ahlfors, Lars V. Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 1979.

[4] Pommerenke, Christian. Boundary behaviour of conformal maps. Vol. 299. Berlin: Springer-Verlag, 1992.